

УДК 539.12

**КВАНТОВЫЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ С КОРНЕЛЬСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ****В.В. Андреев, К.С. Бабич***Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель***QUANTUM AND RELATIVISTIC EFFECTS FOR TWO PARTICLE SYSTEMS WITH THE CORNELL POTENTIAL****V.V. Andreev, K.S. Babich***F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Представлен новый метод численного решения уравнений на связанные состояния элементарных частиц в импульсном представлении с корнельским потенциалом. Получена квадратурная формула, которая может использоваться для решения как интегральных уравнений, так и для численного расчета интегралов. Исследованы некоторые эффекты для двухчастичных квантовых систем с корнельским потенциалом. Для случая нерелятивистского уравнения Шредингера с корнельским потенциалом исследовано поведение волновых функций вблизи критического значения параметра кулоновского потенциала, а также зависимость критического значения при изменении параметра запирающей части потенциала.

**Ключевые слова:** *связанные состояния, импульсное представление, квадратурная формула, корнельский потенциал, коллапс, волновая функция, уравнение Шредингера.*

A numerical method for bound state equations with the Cornell potential in momentum space is represented. A new quadrature formula was obtained. The formula can be used for solving integral equations and for numerical integral computations as well. Some effects for two particle quantum systems with the Cornell potential were observed. For the case of non-relativistic Schrodinger equation with the Cornell potential the exploration of wave functions' behavior near the critical value of the Coulomb potential parameter was provided. A curve that characterizes the critical value dependence from the linear part parameter of potential was plotted.

**Keywords:** *bound states, momentum space, quadrature formula, Cornell potential, collapse, wave function, Schrodinger equation.*

**Введение**

Сегодня уже стала очевидной необходимость релятивистского описания связанных состояний. Современное состояние экспериментов требует учета релятивистских эффектов в теории связанных систем в широкой области: от мезонов до атомов. Эта необходимость продиктована существованием систем, состоящих из легких кварков ( $\pi, K$ -мезоны), наличием релятивистских эффектов в мезонах, содержащих один тяжелый кварк, вкладами релятивистских поправок в электрослабые характеристики.

При изучении энергетических характеристик водородоподобных систем актуальным является расчет различных релятивистских поправок, так как экспериментальные измерения таких величин проводятся с высокой точностью ( $\delta \sim 10^{-13}$ ) [1], [2]. Корректность такого учета зависит от последовательности теоретического описания релятивистских систем.

Таким образом, при изучении различных эффектов следует выделить задачу поиска новых методов расчетов и развития математического аппарата, который позволил бы максимально упростить вычислительные схемы и добиться

результатов с высокой степенью точности, необходимой для экспериментов.

Целью данной работы является численное исследование некоторых эффектов, включая и релятивистские, возникающих в двухчастичных уравнениях (уравнение Шредингера и его полурелятивистского обобщения – уравнение Солпитера – Томпсона) с кулоновским и корнельским потенциалами. Основу исследования составляет оригинальная высокоточная методика решения интегральных уравнений с сингулярными ядрами, возникающими в задачах с потенциалами такого вида в импульсном представлении.

Достоинства использования импульсного представления для решения физических задач (уравнений для связанных состояний, задач рассеяния и др.) давно привлекали внимание исследователей [3], [4]. В импульсном пространстве, в отличие от координатного, отпадает необходимость дополнительных построений, связанных с определением релятивистского оператора кинетической энергии

$$T(k) = \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}.$$

Также относительно несложно получить релятивистский потенциал взаимодействия с

использованием соответствующей амплитуды упругого рассеяния частиц, составляющих систему [5], поскольку расчет изначально ведется в импульсном представлении, которое здесь возникает естественным образом.

Однако, проблемы использования импульсного пространства осложняются тем, что даже потенциалы взаимодействия простейшего вида в импульсном представлении приводят к интегралам с особенностями. Поэтому точность решения для целого ряда задач (кулоновский, корнелеский потенциалы) с учетом современных экспериментальных данных была относительно невысокой ( $10^{-5} \div 10^{-6}$ ) [6], [7]. В этой связи необходимо создание методик, которые были бы относительно несложными в применении и давали результаты с необходимой для эксперимента точностью.

### 1 Уравнение для связанных состояний в импульсном представлении

Уравнение Шредингера в импульсном представлении для центрально-симметричных потенциалов после парциального разложения примет вид:

$$\frac{k^2}{2\mu} \varphi_l(k) + \int_0^\infty V_l(k, k') \varphi_l(k') k'^2 dk' = E \varphi_l(k), \quad (1.1)$$

где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – приведенная масса;  $m_1, m_2$  – массы конститuentов связанной системы;  $\mathbf{k}$  – импульс относительного движения ( $|\mathbf{k}| = k$ );  $\varphi_l(k)$  – радиальная часть фурье-образа волновой функции (ВФ) в координатном представлении;  $V_l(k, k')$  – оператор  $l$ -той составляющей парциального разложения потенциала взаимодействия;  $E$  – энергия связи. Здесь и далее мы опускаем в индексах главное квантовое число  $n$  для сокращения записи.

Однако описание связанных состояний в импульсном представлении усложняется необходимостью решения интегрального уравнения (1.1), содержащего сингулярные члены, тип которых определяется видом  $V_l(k, k')$ .

Продemonстрируем данное утверждение на примере корнелеского потенциала

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r, \quad (1.2)$$

который в импульсном представлении имеет вид:

$$V_l(k, k') = -\frac{\alpha Q_l(y)}{\pi k k'} + \frac{\sigma Q'_l(y)}{\pi (k k')^2}, \quad (1.3)$$

$\alpha$  и  $\sigma$  – параметры кулоновской и линейной части потенциала соответственно.

Здесь величина  $y$  является комбинацией импульсов:

$$y = \frac{k^2 + k'^2}{2k k'}, \quad (1.4)$$

а функция  $Q_l(y)$  – полином Лежандра 2-го рода:

$$Q_l(y) = P_l(y) Q_0(y) - w_{l-1}(y), \quad (1.5)$$

$$Q_0(y) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|; \quad (1.6)$$

$$w_{l-1}(y) = \sum_{n=1}^l \frac{1}{n} P_{n-1}(y) P_{l-n}(y).$$

где  $P_l(y)$  – полиномы Лежандра.

С помощью (1.5), (1.6) находим, что производная  $Q'_l(y)$  в (1.3) определяется соотношением

$$Q'_l(y) = P'_l(y) Q_0(y) + P_l(y) Q'_0(y) - w'_{l-1}(y), \quad (1.7)$$

$$Q'_0(y) = \frac{1}{1-y^2} = -\left( \frac{2k k'}{k' + k} \right)^2 \frac{1}{(k' - k)^2}. \quad (1.8)$$

Поскольку функция  $Q'_l$  сингулярная, в случае если  $k = k'$ , то и сам потенциал  $V_l(k, k')$  также является сингулярным. Стандартные методики численного решения уравнения (1.1) с потенциалом (1.3) дают относительно невысокую точность [6], [7]. Ниже приведем вывод новой квадратурной формулы, которая даст возможность существенно повысить точность решения таких уравнений.

Подставляя выражение (1.3) в (1.1) и используя соотношения (1.5), (1.7), приходим к интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} & \left( E - \frac{k^2}{2\mu} \right) \varphi_l(k) = \\ & = \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^\infty [P'_l(y) Q_0(y) + P_l(y) Q'_0(y) - w'_{l-1}(y)] \varphi_l(k') dk' - \\ & - \frac{\alpha}{\pi k} \int_0^\infty [P_l(y) Q_0(y) - w_{l-1}(y)] \varphi_l(k') k' dk', \end{aligned} \quad (1.9)$$

в котором ядро содержит логарифмическую и полюсную сингулярности, связанные с видом  $Q_0(y)$  и  $Q'_0(y)$ .

Полурелятивистское обобщение уравнения (1.9), (т. н. уравнение Томпсона [6] или бесспиновое уравнение Солпитера [8]), выполняется простой заменой оператора кинетической энергии  $k^2/(2\mu)$  на релятивистское выражение, т. е.

$$\frac{k^2}{2\mu} \rightarrow \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} - m_1 - m_2. \quad (1.10)$$

При этом оператор потенциальной энергии не модифицируется.

### 2 Методика решения интегральных уравнений

Численное решение интегрального уравнения (1.9) может быть сведено к задаче на собственные значения матрицы, которая возникает при использовании квадратурных формул для интегралов, входящих в уравнение.

На первом этапе осуществляется переход от интервала интегрирования  $[0, \infty]$  к «стандартному»  $[-1, 1]$  с помощью замены переменных:

$$\int_0^\infty f(k) dk = \int_{-1}^1 f(k(t)) \frac{dk}{dt} dt. \quad (2.1)$$

Функция  $t(k)$  удовлетворяет граничным условиям:

$$t(k=0) = -1, \quad t(k=\infty) = 1 \quad (2.2)$$

и может быть выбрана в виде [6], [9]–[12]:

$$t(k) = \frac{k-c}{k+c} \quad (2.3)$$

или

$$t(k) = 1 - 2 \exp(-k/c), \quad t(k) = \frac{4(k/c)}{\pi} - 1, \quad (2.4)$$

где  $c$  – некоторый параметр, имеющий размерность величины  $k$ .

Стандартный подход, основанный на квадратурных формулах, приводит к аппроксимации интеграла (2.1):

$$\int_0^\infty f(k) dk \approx \sum_{j=1}^N \tilde{\omega}_j f(k_j), \quad (2.5)$$

где множители  $\tilde{\omega}_j$  связаны с табличными весовыми множителями  $\omega_j$  для области  $[-1, 1]$  соотношением:  $\tilde{\omega}_j = (dk/dt)_j \omega_j$ , а  $N$  задает число узлов (число точек интегрирования).

В итоге интегральное уравнение вида (1.9) может быть сведено к задаче:

$$H_{ij} \varphi(k_j) = E \varphi(k_i), \quad (2.6)$$

где для получения собственных значений и векторов необходимо знать элементы матрицы  $H_{ij}$ . И если для  $i \neq j$  задача расчета элементов  $H_{ij}$  для кулоновского и линейного запирающего потенциалов не является сложной, то при  $i = j$  ( $k = k'$ ) напрямую это сделать не удастся вследствие наличия сингулярностей. Рассмотрим методы, позволяющие находить значения при  $i = j$ .

## 2.1 Методы решения уравнений с сингулярными ядрами

Наиболее часто используемый метод удаления сингулярности – это введение контрчлена (метод вычитания Ланде) [6], [9]. Данная процедура основана на интегральных равенствах [6], [13]:

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} Q_0(y) = \frac{\pi^2}{2}, \quad \int_0^\infty dk Q'_0(y) = 0. \quad (2.7)$$

Использование соотношений (2.7) приводит к модификации уравнения (1.9) (см. [6], [9]):

$$\begin{aligned} & \left( E - \frac{k^2}{2\mu} \right) \varphi_\ell(k) = \\ & = \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^\infty \{ Q'_0(y) [P_\ell(y) \varphi_\ell(k') - \varphi_\ell(k)] - \\ & - w'_{\ell-1}(y) \varphi_\ell(k') \} dk' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^\infty Q_0(y) \left[ P'_\ell(y) \varphi_\ell(k') - \frac{\ell(\ell+1)}{2} \frac{k}{k'} \varphi_\ell(k) \right] dk' + \\ & + \ell(\ell+1) \frac{\pi\sigma}{4k} \varphi_\ell(k) + \frac{\alpha}{\pi k} \int_0^\infty w_{\ell-1}(y) \varphi_\ell(k') k' - \\ & - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty Q_0(y) \left[ P_\ell(y) \frac{k'}{k} \varphi_\ell(k') - \frac{k}{k'} \varphi_\ell(k) \right] dk' + \\ & + \frac{\alpha\pi}{2} \varphi_\ell(k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Применение стандартных квадратурных формул для сведения уравнения (2.8) к задаче на собственные значения (2.6) приводит к тому, что для диагональных элементов матрицы  $H_{ij}$  сингулярности отсутствуют.

Недостатком данной методики является невысокая, с точки зрения современных экспериментальных требований, точность вычислений для кулоновского и линейного запирающего потенциалов. Даже сложная модификация данной методики [6] не приводит к существенному росту точности.

Другим методом решения, который заслуживает рассмотрения с нашей точки зрения, является полуспектральный метод Чебышева, предложенный в работе [14]. В этом подходе введены новые квадратурные формулы для интегралов путем выделения сингулярной части и ее переноса в квадратурные коэффициенты. Данные квадратурные коэффициенты вычислялись аналитически с использованием интерполяции на основе полиномов Чебышева  $T_j(t)$ . Кратко изложим методику получения таких весовых множителей.

Произвольная функция  $f(t)$  на интервале  $[-1, 1]$  может быть разложена по полиномам Чебышева 1-го рода  $T_j(t)$ :

$$f(t) = \sum_{j=1}^N c_j T_{j-1}(t), \quad (2.9)$$

где  $c_j$  – спектральные коэффициенты

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{j-1}(t_i) f(t_i), \quad (2.10)$$

а  $t_i$  – нули полиномов соответствующей степени.

Штрих в формуле (2.9) здесь и далее означает, что первое слагаемое в сумме следует делить на 2.

Полином Чебышева 1-го рода степени  $N$  определяется формулой:

$$T_N(t) = \cos(N \arccos(t)). \quad (2.11)$$

Функция  $T_N$  имеет  $N$  нулей в интервале  $[-1, 1]$ , которые определяются аналитическим выражением

$$t_i = \cos[\pi(i-1/2)/N], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.12)$$

Таким образом, для функции  $f(t)$  получаем:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) f(t_j), \quad (2.13)$$

$$\sigma_j(t) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) T_{i-1}(t).$$

В случае, когда функция  $f(t)$  не имеет особенностей, с помощью (2.13) легко вычислить интеграл по стандартной квадратурной формуле:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=1}^N w_j f(t_j), \quad (2.14)$$

где весовые коэффициенты  $w_j$  имеют вид:

$$w_j = \int_{-1}^1 \sigma_j(t) dt = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \int_{-1}^1 T_{i-1}(t) dt. \quad (2.15)$$

В случае интегралов с особенностями из подынтегральной функции выделим сингулярную при  $t = z$  часть  $-g(t, z)$ . Тогда для такого интеграла по аналогии с (2.14) и (2.15) можно записать, что

$$I = \int_{-1}^1 f(t) g(t, z) dt = \sum_{j=1}^N w_j(z) f(t_j), \quad (2.16)$$

$$w_j(z) = \int_{-1}^1 \sigma_j(t) g(t, z) dt = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \int_{-1}^1 T_{i-1}(t) g(t, z) dt. \quad (2.17)$$

Таким образом, для нахождения весовых коэффициентов  $w_j(z)$  в (2.17) необходимо вычислить аналитически интеграл:

$$I_n(g(t, z)) = \int_{-1}^1 T_n(t) g(t, z) dt. \quad (2.18)$$

Посредством данной методики воспроизведем результат работы [14] (см. формулы (47)–(53) в [14]) для

$$g(t, z) = \frac{1}{t - z}, \quad |z| \leq 1. \quad (2.19)$$

Тогда, используя (2.17), находим, что весовые коэффициенты определяются соотношением:

$$w_j^C(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) I_{i-1} \left( \frac{1}{t - z} \right) \quad (2.20)$$

с

$$I_n \left( \frac{1}{t - z} \right) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{t - z} dt. \quad (2.21)$$

Преобразуем интеграл (2.21) посредством простого вычитания к виду

$$I_n \left( \frac{1}{t - z} \right) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) - T_n(z)}{t - z} dt + T_n(z) \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right|. \quad (2.22)$$

Используя свойства полиномов Чебышева,

$$\frac{T_n(t) - T_n(z)}{t - z} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) T_k(t) \quad (2.23)$$

и то, что

$$\int_{-1}^1 T_n(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n-1)(n+1)} \quad (2.24)$$

получим

$$I_n \left( \frac{1}{t - z} \right) = T_n(z) \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right| + R_n(z), \quad (2.25)$$

где

$$R_n(z) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} U_{n-1-i}(z) \left[ \frac{(-1)^{i+1} - 1}{i^2 - 1} \right]. \quad (2.26)$$

Выражение (2.26), используемое в [14], является не очень удобным для программной реализации, поскольку случай  $i = 1$  приходится вычислять отдельно. С помощью производящей функции для полиномов Чебышева можно получить более удобное соотношение для  $R_n(z)$  в виде [15]:

$$R_n(z) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} T_k(z) \left[ \frac{(-1)^{(n-k)+1} + 1}{(n-k)} \right]. \quad (2.27)$$

Таким образом, окончательно для весовых коэффициентов  $w_j^C$  имеем

$$w_j^C(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \left\{ T_{i-1}(z) \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right| + 2 \sum_{k=0}^{i-2} T_k(z) \left[ \frac{(-1)^{(i-1-k)+1} + 1}{(i-1-k)} \right] \right\}. \quad (2.28)$$

Аналогичные вычисления в случае

$$g(t, z) = \ln |t - z|, \quad |z| \leq 1 \quad (2.29)$$

приводят к формуле

$$w_j^{Log}(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \int_{-1}^1 T_{i-1}(t) \ln |t - z| dt. \quad (2.30)$$

Аналитический расчет коэффициентов  $w_j^{Log}(z)$  приводит к формулам (57), (58) и (60) работы [14], которые здесь не приводятся в силу громоздкости выражений.

Решение уравнения (1.9) с кулоновским потенциалом на основе (2.30) может быть проведено с относительной ошибкой  $\delta \sim 10^{-12} \div 10^{-14}$ , в отличие от методики с контрчленом, где такая ошибка составляет  $\sim 10^{-4}$  [6], или с высокоточными весовыми коэффициентами  $\delta \sim 10^{-7}$  [16].

Применение же данной методики для решения уравнения с линейным запирающим потенциалом (см. [12]) приводит к тому, что интегральное уравнение сводится к интегродифференциальному. Данная особенность приводит не только к усложнению вычислительной процедуры, но и к потере точности. Тогда относительные ошибки полуспектрального метода Чебышева и метода Ланде сравнимы и находятся в пределах  $\delta \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ .

## 2.2 Комбинированная методика решения уравнения

Нами предложен новый способ для решения уравнения с линейным запирающим потенциалом на основе сочетания полуспектрального метода Чебышева [14] и процедуры введения

контрчлена [6], [7]. При этом исходное интегральное уравнение не сводится к интегро-дифференциальному, а точность расчетов существенно возрастает.

Использование методики введения в уравнение контрчленов приводит в случае запирающего потенциала к интегралу вида (см. (1.8) и (2.8))

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_\ell(t) - \varphi_\ell(z)}{(t-z)^2} dt. \quad (2.31)$$

Далее, используя полуспектальный метод Чебышева для  $g(t, z) = 1/(t-z)^2$  (см. (2.16) (2.17)), приходим к новой квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_\ell(t) - \varphi_\ell(z)}{(t-z)^2} dt = \sum_{j=1}^N \omega_j^{Lin}(z) \varphi_\ell(t_j) \quad (2.32)$$

с весовыми коэффициентами

$$\omega_j^{Lin}(z) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) X_{i-1}(z), \quad (2.33)$$

где

$$X_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) - T_n(z)}{(t-z)^2} dt. \quad (2.34)$$

Найдем аналитическое выражение  $\omega_j^{Lin}(z)$ , выполняя операции, аналогичные тем, что привели к соотношению (2.28). Используя соотношение (2.23), имеем:

$$X_n(z) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{t-z} dt, \quad (2.35)$$

где входящий в выражение (2.35) интеграл уже известен. Посредством (2.25) и (2.27) получим, что

$$X_n(z) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) \left\{ T_k(z) \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + R_k(z) \right\}. \quad (2.36)$$

Для упрощения выражения (2.36) используем то, что

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{n-1} U_{n-1-k}(z) T_k(z) = \\ & = \lim_{x \rightarrow z} \frac{T_n(x) - T_n(z)}{x - z} = T'_n(z) = n U_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (2.37)$$

и  $R_0(z) = 0$ . Тогда аналитическое выражение для  $X_n(z)$  приобретает вид:

$$X_n(z) = n U_{n-1}(z) \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + 4 \sum_{k=1}^{n-1} U_{n-1-k}(z) R_k(z). \quad (2.38)$$

Таким образом, если для интегралов уравнения (1.9) с логарифмической сингулярностью используются квадратурная формула (2.30), а для слагаемых с полюсной сингулярностью – соотношение (2.32), то уравнение остается интегральным, в отличие от [12], а задача на собственные значения не содержит громоздких слагаемых, связанных с введением контрчленов.

Применим нашу методику для решения уравнения в импульсном пространстве с корнелским потенциалом (1.3). Поскольку даже в случае нерелятивистского уравнения нет точных решений, то для сравнения точности вычислений используем данные работы [17], где расчеты проделаны в координатном представлении.

В таблице 1 дается сравнение результатов из [17] с нашими результатами, полученными с применением комбинированной методики. Величины, по которым проводится сравнение, связаны с обычными параметрами уравнения (1.9) следующими соотношениями:

$$\lambda = \alpha \left( \frac{4\mu^2}{\sigma} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon = E \left( \frac{2\mu}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Из таблицы 1 видно, что предлагаемая нами методика эффективна даже при малом числе  $N$  и с высокой точностью  $\delta \sim 10^{-11} \div 10^{-12}$  воспроизводит результаты работы [17].

### 3 Квантовые и релятивистские эффекты

Применим разработанную нами методику для исследования некоторых эффектов, возникающих в квантовых связанных системах. Для численных расчетов используем систему с равными массами  $m_1 = m_2 = 1,37$  ГэВ (аналог кварк-антикварковой  $c\bar{c}$  – системы).

Таблица 1 – Сравнение результатов численного решения уравнения Шредингера с корнелским потенциалом в координатном и импульсном представлении. Численный расчет в работе [17] проводился на сетке с числом узлов  $N = 300000$ . Также приводится оценка погрешности вычислений, выполненная авторами работы [17].

$\lambda$	$N$	$\varepsilon(1s)$ (метод этой работы)	$N$	$\varepsilon(1s)$ [17]	$\Delta\varepsilon$
0,0	100	2,338 107 410 459 784	300 000	2,338 107 410 458 750	1,0E–12
0,2		2,167 316 208 772 692		2,167 316 208 771 731	1,0E–12
0,4		1,988 503 899 750 148		1,988 503 899 749 943	9,6E–13
0,6		1,801 073 805 647 306		1,801 073 805 646 145	8,5E–13
0,8		1,604 408 543 236 034		1,604 408 543 235 973	6,6E–13
1,0		1,397 875 641 659 084		1,397 875 641 659 578	3,8E–13
1,2		1,180 833 939 742 701		1,180 833 939 744 863	2,1E–14

### 3.1 Релятивизация кинетической энергии

Один из простейших релятивистских эффектов можно оценить путем замены оператора кинетической энергии  $k^2/2\mu$  на релятивистское выражение (1.10). Тогда получаем уравнение вида:

$$\left[ \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} - (m_1 + m_2) \right] \varphi_\ell(k) + \int_0^\infty V_\ell(k, k') \varphi_\ell(k') k'^2 dk' = E \varphi_\ell(k). \quad (3.1)$$

Сравнение численных расчетов энергии связи для нерелятивистского уравнения Шредингера (1.9) и его релятивистского обобщения уравнения Томпсона (3.1) приведены в Таблице 2.

Таблица 2 – Сравнение результатов численного решения уравнения Томпсона (3.1) и уравнения Шредингера (1.9) с корнелским потенциалом в импульсном представлении. Число узлов в сетке  $N = 250$ . Массы кварков  $m_1 = m_2 = 1,37$  ГэВ. Параметр  $\sigma = 0,19$  ГэВ<sup>2</sup>.

$\alpha$	$N$	$E(1s)$ Ур. Томпсона	$E(1s)$ Ур. Шредингера	$\delta E, \%$
0,0000	250	0,679762395	0,695760875	2,30
0,0932		0,625832014	0,644937788	2,96
0,1864		0,568477222	0,591727825	3,93
0,2796		0,507164386	0,535953430	5,37
0,3728		0,441227549	0,477430886	7,58
0,4661		0,369819564	0,415971985	11,10
0,5593		0,291837111	0,351385934	16,95
0,6525		0,205800023	0,283481410	27,40

Анализ расчетных данных показывает, что абсолютная разница и процентный вклад между собственными значениями уравнений Томпсона и Шредингера растет с увеличением параметра кулоновской части потенциала  $\alpha$ . Отметим, что аналогичное поведение имеет место и при решении уравнений (1.1) и (3.1) вариационным методом, поскольку

$$\sqrt{k^2 + m^2} < \frac{k^2}{2m} + m. \quad (3.2)$$

### 3.2 Критическое значение параметра $\alpha$

В квантовых системах с кулоновским потенциалом существует критическое значение параметра  $\alpha_{cr.}$ , при котором энергетический спектр не имеет физических решений. Так, например, для уравнения Шредингера только с кулоновским потенциалом, где известно точное решение, это значение может быть найдено аналитически.

Для случая равных  $m_1 = m_2$  условие того, что энергия связи становится больше, чем сумма масс частиц, составляющих связанную систему, запишется в виде

$$-\frac{m\alpha^2}{4n^2} + 2m = 0, \quad (3.3)$$

откуда и находим

$$\alpha_{cr.} = 2\sqrt{2} n^2. \quad (3.4)$$

В работе [18] (см. также ссылки в [19]) было показано, что и релятивистское обобщение уравнения Шредингера – бесспиновое уравнение Солпитера будет также иметь критическое значение.

Применяя разработанную методику численных расчетов, найдем  $\alpha_{cr.}$  для уравнения Шредингера с корнелским потенциалом (1.9) и исследуем зависимость критических значений от параметра записания  $\sigma$ . Отметим, что такие эффекты ранее не исследовались. Результаты вычислений зависимости  $\alpha_{cr.} = \alpha_{cr.}(\sigma)$  представлены на рисунке 1. Область изменения  $\sigma = 0,1 \div 1$  ГэВ<sup>2</sup> выбрана таким образом, чтобы включить большинство кварковых моделей [10], [20], [21].

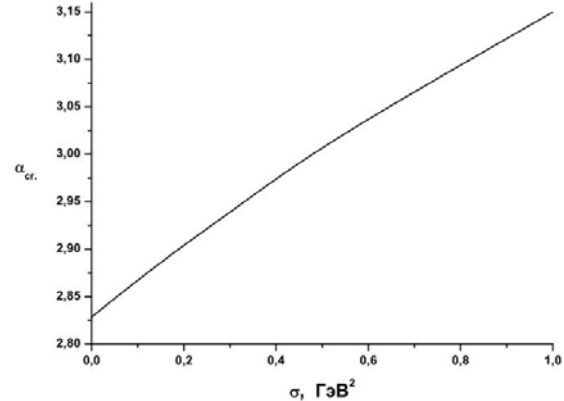


Рисунок 1 – Зависимость критического значения  $\alpha_{crit}$  от параметра линейного записания  $\sigma$  для уравнения Шредингера

Для уравнения Шредингера с корнелским потенциалом возникает эффект «увеличения»  $\alpha_{crit}$  до значения в диапазоне  $2,82 < \alpha < 3,15$ , что, очевидно, связано с добавкой запирающего слагаемого к кулоновскому потенциалу, вклад от которого необходимо «перекрыть», увеличивая  $\alpha$ .

### 3.3 Коллапс волновых функций

С существованием критических значений параметров потенциалов взаимодействия тесно связано явление, которое называют коллапсом волновых функций. При коллапсе волновые функции локализуются в области  $r$ , близкой к нулю, что, соответственно, в импульсном пространстве приводит равномерному распределению по  $k$ .

На рисунке 2 представлены графики волновых функций основного состояния для уравнения Шредингера с корнелским потенциалом

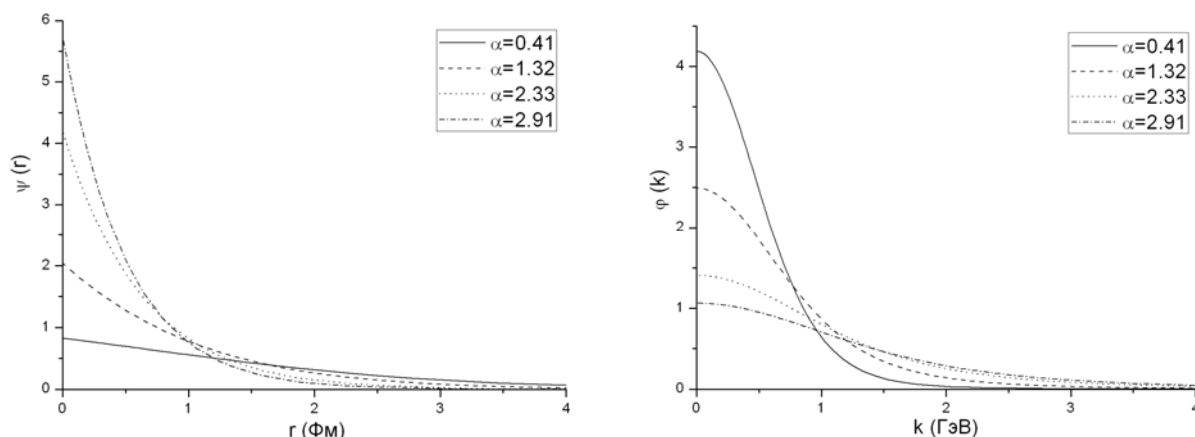


Рисунок 2 – ВФ основного состояния для уравнения Шредингера с корнеловским потенциалом

( $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$ ) для различных значений  $\alpha$  в координатном и импульсных представлениях. Легко заметить, что по мере приближения к критическому значению  $\alpha = 2,92$ , волновая функция (в координатном представлении) проявляет тенденцию к локализации в области  $r \sim 0$ .

### Заключение

На основе нового прецизионного метода решения уравнений в импульсном представлении с корнеловским потенциалом исследован эффект релятивизации кинетической энергии квантовой системы. Показано, что для полурелятивистского варианта уравнения происходит уменьшение энергии связи по сравнению с нерелятивистским.

Найдено, что для основного состояния критические значения параметра кулоновской части корнеловского потенциала  $\alpha_{crit}$  увеличиваются с ростом параметра запирающего  $\sigma$  (см. рисунок 1). Для этой системы исследовано поведение волновых функций основного состояния близи критических значений. Показано, что для критических значений  $\alpha_{crit}$  наступает явление коллапса ВФ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Phase-Coherent Measurement of the Hydrogen 1S–2S Transition Frequency with an Optical Frequency Interval Divider Chain* / T. Udem [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – Oct 1997. – Vol. 79, № 14. – P. 2646–2649.
2. *High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment* / W. Liu [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 82. – P. 711–714.
3. *Bete, H.A. Quantum Mechanics of One and Two-Electron Atoms* / H.A. Bete, E.E. Salpeter. – Berlin–Göttingen–Heidelberg : Springer-Verlag, 1957. – P. 1232–1242.
4. *Eyre, D. Solving momentum space integral equations for quarkonia spectra with confining*

potentials / D. Eyre, J.P. Vary // *Phys. Rev.* – 1986. – Vol. D34. – P. 3467–3471.

5. *Lucha, W. Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states* / W. Lucha, H. Rupprecht, F.F. Schoberl // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.

6. *Tang, A. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space* / A. Tang, J.W. Norbury // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. E63. – P. 066703.

7. *Norbury, J.W. Confining potential in momentum space* / J.W. Norbury, D.E. Kahana, K. Maung Maung // *Can. J. Phys.* – 1992. – Vol. 70. – P. 86–89.

8. *Salpeter, E. E. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms* / E.E. Salpeter // *Phys. Rev.* – 1952. – Vol. 87, № 2. – P. 328–343.

9. *Bielefeld, S. On technically solving an effective QCD Hamiltonian* [Electronic resource] / S. Bielefeld, J. Ihmels, H.-C. Pauli. – 1999. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9904241>. – Date of access: 14.01.2008.

10. *Savkli, C. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism* / C. Savkli, F. Gross // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. C63. – P. 035208.

11. *van Iersel, M. Techniques for solving bound state problems* [Electronic resource] / M. van Iersel, C. van der Burgh, B.L. Bakker. – 2000. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0010243>. – Date of access: 24.01.2005.

12. *Deloff, A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited* / A. Deloff // *Annals Phys.* – 2007. – Vol. 322. – P. 2315–2326.

13. *Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е переработанное изд. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.

14. *Deloff, A. Semi-spectral Chebyshev method in Quantum Mechanics* / A. Deloff // *Annals Phys.* – 2007. – Vol. 322. – P. 1373–1419.

15. *Андреев, В.В. Новая квадратурная формула для интегралов с особенностями в задачах*

на связанные состояния / В.В. Андреев, К.С. Бабич // В сб. науч. трудов «Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности» / Институт физики НАН Беларуси. – Вып. 7. – Минск : Институт физики НАН Беларуси, 2011. – С. 216–222.

16. Андреев, В.В. Водородоподобная система в релятивистской гамильтоновой динамике / В.В. Андреев, В. Андреев, Т.В. Шишкина // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), часть 1. – С. 13–17.

17. Kang, D. Precise Numerical Solutions of Potential Problems Using Crank-Nicholson Method / D. Kang, E. Won // J. Comput. Phys. – 2008. – Vol. 227. – P. 2970–2976.

18. Herbst, I. Spectral Theory of the Operator  $\sqrt{p^2 + m^2} - \frac{ze^2}{2}$  / I. Herbst // Commun. Math. Phys. – 1977. – Vol. 53. – P. 285–294.

19. Lucha, W. Relativistic Coulomb problem: Energy levels at the critical coupling constant analytically / W. Lucha, F.F. Schoberl // Phys. Lett. – 1996. – Vol. B387. – P. 573–576.

20. Godfrey, S. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics / S. Godfrey, N. Isgur // Phys. Rev. – 1985. – Vol. D32. – P. 189–231.

21. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовоплевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель : УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.

Поступила в редакцию 09.09.11.